TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Definición. Sea V un conjunto y $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si se cumplen las siguientes propiedades:

1) En V hay definida una operación, llamada suma y denotada por $+$, que asocia a cada par de elementos $u, v \in V$ un nuevo elemento $u+v$ de forma que se cumplen las siguientes propiedades:

1.1. Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u,v,w \in V$

1.2. Conmutativa: $u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$.

1.3. Elemento neutro: $\exists\, 0 \in V : u+0 = 0+u = u \quad \forall u \in V$.

1.4. " opuesto: Dada $u \in V$ $\exists\, v \in V$ tal que $u+v = v+u = 0$. A partir de ahora denotaremos $v = -u$.

2) En V hay definida una segunda operación, llamada producto por escalares, que asocia a cada elemento $u \in V$ y $\lambda \in K$, un nuevo elemento $\lambda \cdot u \in V$ de modo que:

2.1) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall u,v \in V \quad \forall \lambda \in K$

2.2.) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu \cdot u \quad \forall u \in V \quad \forall \lambda,\mu \in K$.

2.3.) $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u) \quad \forall u \in V, \forall \lambda,\mu \in K$.

2.4) $1 \cdot u = u \quad \forall u \in U$.

~~Escribiremos $(V,$~~

A los elementos de V les llamaremos vectores y a los de K ~~es~~ escalares.

Ejemplos

1) Sean $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, .., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ y $\mathbf{K} = \mathbb{R}$.

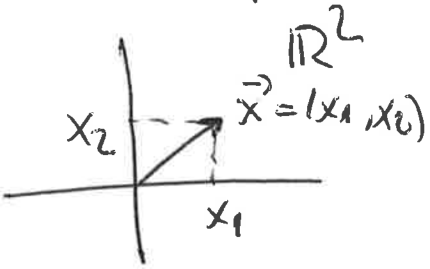
Definimos la suma de vectores como:

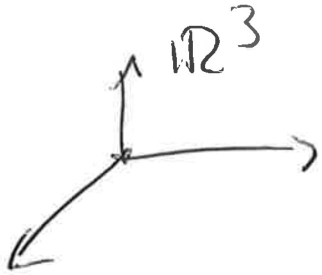
$$(x_1, .., x_n) + (y_1, .., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

y el producto por escalares

$$\lambda \cdot (x_1, .., x_n) = (\lambda x_1, .., \lambda x_n)$$

Se puede demostrar que $\mathbb{R}^n$ con estas dos operaciones es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial





2) Sea $V = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todos los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales y sea $K = \mathbb{R}$.

Definimos la suma de polinomios como

$$(a_1 x^2 + a_2 x + a_3) + (b_1 x^2 + b_2 x + b_3) = (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)x + a_3 + b_3$$

y el producto por escalares

$$\lambda (ax^2 + bx + c) = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c.$$

V tiene estructura de espacio vectorial.

SUBESPACIOS VECTORIALES

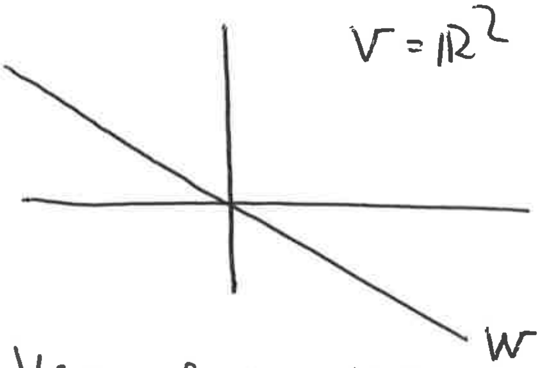
Def. Sea W un subconjunto de un k-espacio vectorial. Se dice que W es un subespacio vectorial de V si se cumple:

1) $u+v \in W \quad \forall\, u,v \in W$

2) $\lambda u \in W \quad \forall\, u \in W \ \forall\, \lambda \in k$.

Ejemplos

1) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$



Veamos que W es un subespacio vectorial. En efecto:

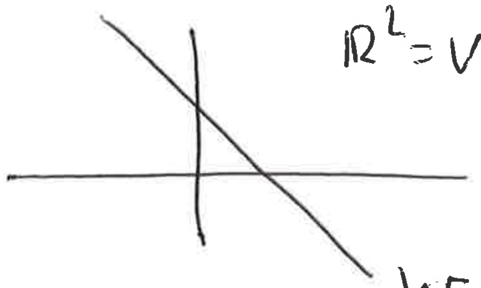
1) $\begin{array}{l} u=(x_1,y_1)\in W \\ v=(x_2,y_2)\in W \end{array} \overset{?}{\Longrightarrow} u+v\in W$

$u+v=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in W \Longleftrightarrow \underbrace{x_1+x_2+y_1+y_2}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{x_1+y_1}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \underbrace{x_2+y_2}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}}}=0$

2) $\begin{array}{l} u=(x_1,y_1)\in W \\ \lambda\in\mathbb{R} \end{array} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda u\in W$

$\lambda\cdot u=\lambda\cdot(x_1,y_1)=(\lambda x_1, \lambda y_1)\in W \Longleftrightarrow \underbrace{\lambda x_1+\lambda y_1}_{\lambda\underbrace{(x_1+y_1)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}=0}=0$.

2) $V=\mathbb{R}^2$, $\quad W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}$



Sean $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in W \Rightarrow (x_1,y_1)+(x_2,y_2) \overset{?}{\in} W$

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\, y_1+y_2)$

$$\underline{x_1}+x_2+\underline{y_1}+y_2 = 1+1 = 2 \quad \text{NO}.$$

COMBINACIONES LINEALES

Sea $S=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$ un conjunto de vectores.

$\uparrow$ contenido

Dado $v\in V$, se dice que v es "combinación lineal" de $\{v_1,\dots,v_n\}$ si existen escalares $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in K$ tales que

$$v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n.$$

Ejemplo

$$S=\{(0,1,2),(3,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3.$$

¿Es $v=(-3,2,3)$ combinación lineal de los vectores de S?

$$(-3,2,3)=\lambda_1(0,1,2)+\lambda_2(3,0,1)$$

$$\left.\begin{aligned} -3&=3\lambda_2\\ 2&=\lambda_1\\ 3&=2\lambda_1+\lambda_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \lambda_2=-1\\ &\to \lambda_1=\cancel{\tfrac{1}{2}}\,2\\ &\to 3=2\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}\,2-1 \end{aligned} \qquad \text{Sí}$$

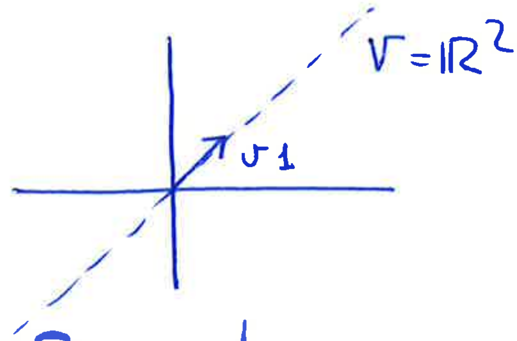
• Se llama subespacio generado por $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ al conjunto, denotado $<S>$ ó $\text{span}\{v_1,\dots,v_n\}$ de todas las combinaciones lineales de elementos de S, es decir,

$$<S> = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \,,\, \lambda_i \in K,\ 1 \le i \le n\}.$$

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^2, \quad S = \{v_1 = (1,1)\}$

$$<S> = \{\lambda\cdot(1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



$<S>$ = recta $y=x$.

• Dado un (sub) espacio vectorial V, se dice que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un "sistema generador" de V si

$$<v_1,\dots,v_n> = V.$$

Ejemplo. $V = \{(\lambda,\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

$v = (1,1)$ es un sistema generador de V pues $<v> = V$.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea V un k-e.v. y $S=\{v_1,..,v_n\}$ un conjunto de vectores. Se dice que $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es linealmente dependiente si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, NO TODOS NULOS, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Supongamos, por ejemplo, que $\lambda_1 \neq 0$. Entonces,

$$v_1 = -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n).$$

En caso contrario, se dice que $S=\{v_1,v_2,..,v_n\}$ es un sistema libre de vectores o que $\{v_1,v_2,..,v_n\}$ son linealmente independientes. Por tanto, si la identidad

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

es satisfecha "únicamente" por los escalares

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

entonces $\{v_1,v_2,..,v_n\}$ es libre.

Ejemplos

1) $V=\mathbb{R}^2$, $S=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ ¿es lin. dep.?

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)+\lambda_3(1,1) = (0,0)$$

$$(\lambda_1+\lambda_3, \lambda_2+\lambda_3) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2 = r(A|b) < 3 = n^{\underline{o}}\, inc.$$

S.C.I. Infinitas soluciones que dependen de 1 parámetro.

$\lambda_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda_2 = -\alpha$

$\lambda_1 = -\alpha$

Los tres vectores son linealmente dependientes.

2) $V = \mathbb{R}^3$. $\quad S = \{ v_1 = (0,3,4),\ v_2 = (1,2,3) \}$

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$(0,0,0) = \lambda_1 (0,3,4) + \lambda_2 (1,2,3)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \lambda_2 \\ 0 &= 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 &= 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{aligned}\right\} \to \lambda_1 = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

S es un sistema libre $\{v_1, v_2\}$ son lin. indep.

BASES Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sistema de vectores. Se dice que B es una base de V si:

1) B es libre.

2) $\langle B \rangle = V$.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^n$, $k = \mathbb{R}$.

$B = \{ (1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1) \}$

es una base de $\mathbb{R}^n$. En efecto:

$$\lambda_1 \cdot (1,0,\dots,0) + \lambda_2 (0,1,0,\dots,0) + \dots + \lambda_n (0,\dots,0,1) = (0,\dots,0)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, es decir, B es libre.

Veamos que $\langle B \rangle = \mathbb{R}^n$. Obviamente, $\langle B \rangle \subset \mathbb{R}^n$.

Sea ahora $v \in \mathbb{R}^n$ y veamos que $v \in \langle B \rangle$.

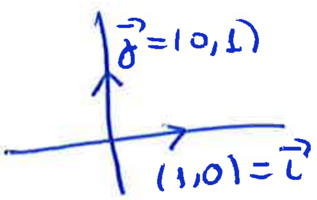
$v = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces existen escalares

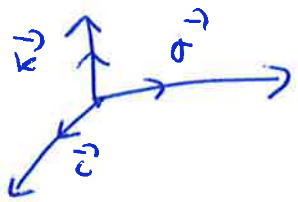
$\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$, $\dots$, $\lambda_n = x_n$

tales que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot (1,0,\dots,0) + x_2 (0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n (0,\dots,0,1).$$

B se llama base canónica ó base de coordenadas cartesianas y se suele denotar por C.





$C = \{ \vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1) \}$

$C = \{ \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1) \}$.

TEOREMA

Sea V un k-e.v. Entonces V tiene alguna base.

Además, todas las bases de V tienen el mismo número de ~~elementos~~ vectores. A dicho número ~~de~~ ~~le~~ se le llama dimensión de V y se denota $\dim(V)$.

Coordenadas respecto a una base

Sean V un K-e.v. y $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base.

Dado $v\in V$, como B genera V, entonces existen escalares $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ tales que

$$v = x_1v_1+x_2v_2+\dots+x_nv_n=\sum_{i=1}^{n} x_iv_i$$

Además, como B es libre, $x_1,x_2,\dots,x_n$ son únicos.

En efecto, si existieran $\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n}\in\mathbb{R}$ tales que

$$v=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\,v_i=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$$

entonces, $$\sum_{i=1}^{n}(\overline{x_i}-x_i)v_i=0$$

y al ser $\{v_1,\dots,v_n\}$ lin. indep, entonces $\overline{x_i}-x_i=0 \Rightarrow \overline{x_i}=x_i$ $\forall\, 1\le i\le n$.

A los números $x_1,\dots,x_n$ se los llama coordenadas de v en la base B y se denota $v_B=(x_1,\dots,x_n)$.

Cambio de base

Sean $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ y $B'=\{v_1',v_2',\dots,v_n'\}$ dos bases de V. Dado $v\in V$, pretendemos relacionar las coordenadas de v en B, v_B, con las coordenadas de v en B', $v_{B'}$. Para ello, haremos uso del concepto de matriz de cambio de base.

- Se llama matriz de cambio de base de B a B', denotado $M_{B\to B'}$ a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B en la base B'.

Es decir,

$v_1 = a_{11}v_1' + a_{21}v_2' + \dots + a_{n1}v_n'$

$v_2 = a_{12}v_1' + a_{22}v_2' + \dots + a_{n2}v_n'$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$v_n = a_{1n}v_1' + a_{2n}v_2' + \dots + a_{nn}v_n'$

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (v_1)_{B'} & (v_2)_{B'} & (v_n)_{B'}. \end{array}$$

Sea ahora $v_B = (x_1, \dots, x_n)$ y $v_{B'} = (x_1', \dots, x_n')$.

Entonces,

$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$

$= x_1(a_{11}v_1' + \dots + a_{n1}v_n')$

$+ x_2(a_{12}v_1' + \dots + a_{n2}v_n')$

$+ \dots\dots\dots\dots\dots$

$+ x_n(a_{1n}v_1' + \dots + a_{nn}v_n')$

$=$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)v_1' $$
$$+ (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)v_2'$$
$$+ \quad - - - - - - - - -$$
$$+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)v_n'.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\boxed{v_{B'} = M_{B \to B'} \, v_B}$$

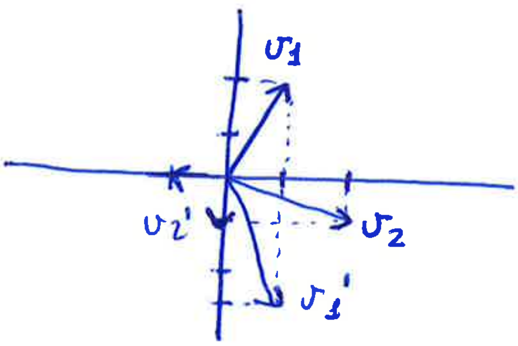
y despejando,

$$\boxed{v_B = (M_{B\to B'})^{-1} \, v_{B'}}$$

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^2 \qquad B = \{ \cancel{}\ v_1 = (1,2),\ v_2 = (2,-1) \}$

$\qquad\qquad B' = \{ v_1' = (1,-3),\ v_2' = (0,-1) \}$



$$v_1 = (1,2) = a_{11} v_1' + a_{21} v_2'$$
$$= a_{11}(1,-3) + a_{21}(0,-1)$$
$$= (a_{11}\ ,\ -3a_{11} - a_{21})$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 1 = a_{11} \\ 2 = -3a_{11} - a_{21} \end{array}\right\} \rightarrow a_{21} = -2 - 3a_{11} = -2 - 3 \cdot 1 = \cancel{8} -5$$

$$M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \cancel{8}-5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = (2,-1) = a_{12} v_1' + a_{22} v_2'$$
$$= a_{12}(1,-3) + a_{22}(0,-1)$$
$$= (a_{12}\ ,\ -3a_{12} - a_{22})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = a_{12} \\ -1 = -3a_{12} - a_{22} \rightarrow a_{22} = -3a_{12} + 1 \end{array}\right.$$
$$= -3 \cdot 2 + 1$$
$$= -5$$

Sea ahora $v_B = (1,1) \rightarrow v_B = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$
$$= (3,1)$$

¿Cómo calcula $v_{B'}$

$$v_{B'} = M_{B \to B'} v_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3, -10)$$

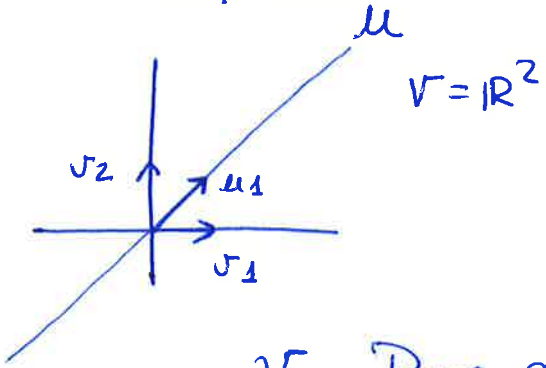
$$v_{B'} = 3 \cdot v_1' - 10 \cdot v_2'$$
$$= 3(1,-3) - 10 \cdot (0,-1)$$
$$= (3,-9) + (0,10)$$
$$\boxed{= (3,1)}$$

ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea V un K-e.v. y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

Sea ahora $U \subset V$ un subespacio vectorial y

$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ una base de U.



Finalmente, sea $v \in V$. Para que $v \in U$ deben existir escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$$

En coordenadas, si $v_B = (x_1, \dots, x_n)$ y $(u_i)_B = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

y por tanto,

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1k}\alpha_k \\ x_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2k}\alpha_k \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nk}\alpha_k \end{cases}$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones paramétricas de U.
Si se eliminan los parámetros de estas ecuaciones se obtienen unas nuevas ecuaciones en las variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que se llaman ecuaciones implícitas de U.

Ejemplo 1

$V = \mathbb{R}^3$, $B = \{ \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1) \}$

$\mathcal{U} = \langle (1,0,3), (-1,2,-2) \rangle$

Ecuaciones paramétricas

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \in \mathcal{U} \iff \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda - \mu \\ y &= 2\mu \\ z &= 3\lambda - 2\mu \end{aligned}\right\} \text{ ec. paramétricas}$$

Ecuaciones implícitas

$$\mu = \frac{y}{2} \longrightarrow \lambda = x + \mu = x + \frac{y}{2}$$

$$\longrightarrow z = 3\left(x + \frac{y}{2}\right) - y = 3x + \frac{3}{2}y - y = 3x + \frac{1}{2}y$$

$\boxed{3x + \frac{1}{2}y - z = 0}$ ecuación implícita.

Geométricamente, representa un plano.

Ecuación general de un plano.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\vec{n} = (a,b,c) =$ vector perpendicular a un plano.

d ~~= altura~~ si $x = y = 0 \to z = -\frac{d}{c}$

d ~~es un indicador de~~

Ejemplo 2

$V = \mathbb{R}^3$, $\quad B = \{\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\}$

$\mathcal{U} = \langle (-2,4,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{ ec. paramétricas}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 4\lambda \end{array}\right\} \quad \lambda = -\frac{x}{2}$$

$$y = 4 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = -2x \rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} y + 2x = 0 \\ y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow y = 4z$$

ec. implícitas
geométricamente
es una recta, intersección
de 2 planos.

~~SUMA E INTERSECC~~

SUMA E INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

Sean V un K-e.v. y $\mathcal{U}, W$ dos subespacios de V.

Llamaremos suma de $\mathcal{U}$ y W al conjunto de vectores

$$\mathcal{U} + W = \{ u + w : u \in \mathcal{U}, w \in W \}$$

Se llama intersección de $\mathcal{U}$ y W al conjunto

$$\mathcal{U} \cap W = \{ v \in V : v \in \mathcal{U} \text{ y } v \in W \}$$

Propiedades

(1) $\mathcal{U}+W$ y $\mathcal{U}\cap W$ son subespacios vectoriales de V.

(2) Las ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}$ junto con las ecuaciones implícitas de W constituyen unas ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}\cap W$.

(3) Se cumple la fórmula de las dimensiones siguiente:

$$\dim(\mathcal{U}+W)=\dim(\mathcal{U})+\dim(W)-\dim(\mathcal{U}\cap W)$$

Si $\dim(\mathcal{U}\cap W)=0$, se dice que la suma es directa y se denota $\mathcal{U}\oplus W$.

Ejemplo

$V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{U}=\langle(1,2,-1),(3,1,2)\rangle$

$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x-y+z=0\}$

Calcular $\mathcal{U}+W$, $\mathcal{U}\cap W$.

Ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\lambda+3\mu\\y=2\lambda+\mu\\z=-\lambda+2\mu\end{array}\right\}\quad (A|b)=\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\2&1&y\\-1&2&z\end{array}\right)$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 5x - 5y - 5z = 0$$

$x - y - z = 0$ ec. implícita.

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ec. implícitas de $U \cap W$

ρ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas

$z = \alpha \rightarrow$

$$\begin{aligned} x - y &= \alpha \\ 3x - y &= -\alpha \\ \hline 2x &= -2\alpha \end{aligned} \rightarrow x = -\alpha$$

$y = x - \alpha = -2\alpha.$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$U \cap W = \langle (-1, -2, 1) \rangle.$

$$\underset{\overset{\|}{3}}{\dim(U + W)} = \underset{2}{\dim(U)} + \underset{2}{\dim W} - \underset{1}{\dim(U \cap W)}$$

$U + W = \mathbb{R}^3.$